



TITLE:

# 単調作用素列の収束について (Banach空間におけるOperatorの研究)

AUTHOR(S):

渡辺, ヒサ子

---

CITATION:

渡辺, ヒサ子. 単調作用素列の収束について (Banach空間におけるOperatorの研究). 数理解析研究所講究録 1977, 290: 30-41

ISSUE DATE:

1977-03

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/106161>

RIGHT:

# 単調作用素列の収束について

お茶の水女大 理 渡辺ヒサ子

§ 1. 序  $([0, 1])$  上の positive linear operators の列  $(L_n)$  の収束に関する Korovkin の定理と呼ばれる次の定理がある。すなわち、 $g=1, =x, =x^2$  に対して、 $(L_n g)$  が  $g$  に一様に収束すれば、どんな  $f \in C([0, 1])$  に対しても、 $(L_n f)$  は  $f$  に一様に収束する。この定理はいろいろな形で一般化されているが、H. Bauer により次の形で一般化された。 $X$  を compact Hausdorff 空間とする。 $(L_i)_{i \in I}$  を  $C(X)$  から  $\mathbb{R}^X$  ( $X$  上の実数値関数全体からなる ordered vector space) への monotone mappings からなる net として、 $F$  は定数関数を含み、 $X$  の点を separate するような  $C(X)$  の部分空間とある。そのとき、すべての  $g \in F$  に対して  $(L_i g)$  が  $g$  に pointwise (resp. uniformly) に収束すれば、どんな  $F$ -affine 関数  $f$  に対しても、 $(L_i f)$  は  $f$  に pointwise (resp. uniformly) に収束する。そのような  $f$  の集合  $\bar{F}$  が  $C(X)$  と一致するための

必要かつ十分条件は、 $F$ に関する Choquet 境界が  $X$  と等しいことである ([1]). また H. Bauer は 局所 compact 空間においても、適当な条件のもとでは、収束を局所一様、又は order 収束にかえても、同様の結果が得られることを示している ([1], [2]).

ここでは、特に順序に重きを置いて、ordered vector 空間で考える。あなめち、 $E$  を ordered vector 空間、 $Y$  を集合として、 $C$  は  $E$  の convex cone とある。  $C$  から  $\mathbb{R}^Y$  への monotone mapping (又は sublinear mapping)  $A$  と、  $E$  から  $\mathbb{R}^Y$  への monotone mappings からなる net  $(L_i)_{i \in I}$  に対して、  $\lim L_i g \leq A g$  ( $\forall g \in C$ ) ならば、  $(L_i f)$  がある  $L f \in \mathbb{R}^Y$  に pointwise に収束するための  $f$ 、又は  $C, A$  に対する条件、又は  $E$  の linear subspace  $F$  に対して、  $\lim L_i g = A g$  ( $\forall g \in F$ ) ならば、  $(L_i f)$  は ある  $L f \in \mathbb{R}^Y$  に pointwise に収束するための条件、さらに、 pointwise 収束を 局所一様収束 又は order 収束にして、同様の条件を考へたい。

§2.  $A(C)$ -境界,  $A(C)$ -affine 関数.  $E$  は ordered vector 空間,  $C$  は  $E$  に含まれる convex cone で  $E$  は  $C^+$ -bounded とある。ここで、 $E$  が  $C^+$ -bounded であるというのは、どんな  $f \in E$  に対して  $g \geq 0$  で  $-g \leq f \leq g$

であるよるは  $g \in C$  が存在することである。  $Y$  は集合として、  $A$  は  $C$  から  $\mathbb{R}^Y$  への写像である。  $A$  が  $C$  で monotone であるというのは、

$$C \ni f, g, f \leq g \Rightarrow Af \leq Ag,$$

が成り立つことである。  $A$  が sublinear (resp. subadditive) であるというのは、次の (i) と (ii) (resp. (i)) を満たすことである:

$$(i) C \ni f, g \Rightarrow A(f+g) \leq Af + Ag,$$

$$(ii) C \ni f, \lambda \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow A(\lambda f) = \lambda Af.$$

このとき、  $A$  は  $C$  から  $\mathbb{R}^Y$  への monotone, sublinear mapping である。このとき、  $E \ni f$  と、  $Y \ni y$  に對して、

$$\bar{A}f(y) = \inf \{ Ag(y); g \geq f, g \in C \}$$

とおく。  $-\infty < \bar{A}f(y) < \infty$  であり、  $\bar{A}f: f \mapsto \bar{A}f(y)$  は  $E$  上の sublinear functional である。  $Y \ni y$  に對して、

$$\mathcal{M}_y = \{ \mu \in E^{*+} : \mu(f) \leq \bar{A}g(y), \forall g \in C \}$$

とおく。ここで  $E^{*+}$  は  $E$  上の positive linear functional の全体である。 Hahn-Banach の拡張定理を使って、次の補題が得られる。

補題.  $f \in E$  と  $y \in Y$  に對して、

$$\bar{A}f(y) = \max \{ \mu(f); \mu \in \mathcal{M}_y \}$$

が成り立つ。

$M_\gamma$  が一点集合となるような点  $y \in Y$  の集合を  $\delta(A(C))$  で表わし、 $A(C)$ -境界と呼ぶことにする。

命題 1.  $y \in \delta(A(C))$  であるための必要かつ十分条件は、どの  $f \in E$  に対しても、 $\overline{Af}(y) = -\overline{A(-f)}(y)$  が成り立つことである。

$Y$  上で  $Af = -\overline{A(-f)}$  である  $f \in E$  を  $A(C)$ -affine element と呼ぶ。このとき、次の系が得られる。

系.  $\delta(A(C)) = Y$  であるための必要かつ十分条件は、どんな  $f \in E$  も  $A(C)$ -affine であることである。

§3. 局所一様収束.  $Y$  は局所 compact Hausdorff 空間、 $E$  は ordered vector 空間で、 $C$  は  $E$  が  $C^+$ -bounded であるような  $E$  に含まれる convex cone とある。  $A$  は  $C$  から  $C(Y)$  への sublinear mapping とある。  $E$  から  $\mathbb{R}^Y$  への monotone mappings からなる net  $(L_i)_{i \in I}$  と  $SCY$  に対して、 $g \in E$  で、 $S$  上-様に  $\overline{\lim} L_i g \leq h$  であるといふのは、任意の  $\varepsilon > 0$  に対して、index  $i_0 \in I$  で、どんな  $i \geq i_0$  でも、

$$L_i g(y) < h(y) + \varepsilon \quad (\forall y \in S)$$

を成り立たせる  $\alpha$  が存在することである。また、どんな compact 集合  $S$  に対しても、 $S$  上-様に  $\overline{\lim} L_i g \leq \alpha$  であるとき、 $Y$  上局所-様に  $\overline{\lim} L_i g \leq \alpha$  であるという。

定理1.  $(L_i)$  は  $E$  から  $\mathbb{R}^Y$  への monotone, sub-additive mappings からなる net で、 $L_i(0) = 0$  を満たすものとする。  $S$  は  $Y$  の compact 部分集合とする。どんな  $g \in C$  に対しても、 $S$  上-様に  $\overline{\lim} L_i g \leq A g$  であれば、 $S$  上  $\overline{A}f = -\overline{A(-f)}$  であるような  $f$  に対して、 $(L_i f)$  は  $S$  上-様に  $\overline{A}f$  に収束する。

系1. どんな  $g \in C$  に対しても、 $Y$  上局所-様に  $\overline{\lim} L_i g \leq A g$  であれば、どんな  $A(C)$ -affine  $f$  に対しても  $(L_i f)$  は  $\overline{A}f$  に  $Y$  上局所-様に収束する。

系2.  $S$  は  $\delta(A(C))$  の compact 部分集合とする。どんな  $g \in C$  に対しても、 $\overline{\lim} L_i g \leq A g$  であれは、 $\overline{\lim} L_i g \leq A g$  である。どんな  $f \in E$  に対しても  $(L_i f)$  は  $S$  上-様に  $\overline{A}f$  に収束する。

さらに、 $F$  は  $E$  の linear subspace で、 $E$  は  $F^\perp$ -bounded とある。このときは、 $F$  から  $\mathbb{R}^Y$  への monotone mapping  $A$  に対して、

$$\overline{A}f(y) = \inf \{ A g(y); g \geq f, g \in F \},$$

$$\underline{Af}(y) = \sup\{A_h(y); h \leq f, g \in F\}$$

か、 $f \in E$  と  $y \in Y$  に對して定義され、 $\infty > \overline{Af}(y) > -\infty$ ,  
 $\infty > \underline{Af}(y) > -\infty$  であり、 $\underline{Af}(y) \leq \overline{Af}(y)$  を満足する。

$(L_i)$  は  $E$  から  $\mathbb{R}^Y$  への monotone mappings からなる  
 net とあるとき、次の定理と系1, 系2 が得られる。

定理2.  $A$  は  $F$  から  $C(Y)$  への monotone mapping と  
 ある。任意の compact set  $S \subset Y$  に對して、どんな  $g \in F$   
 についても  $S$  上-様に  $\lim L_i g = Ag$  であければ、 $S$  上で  
 $\overline{Af} = \underline{Af}$  であるような  $f \in E$  に對して、 $S$  上-様に  
 $\lim L_i f = \overline{Af}$  である。

系1.  $A$  は  $F$  から  $C(Y)$  への monotone, subadditive  
 mapping で  $A(0) = 0$  を満足するものとする。どんな  $g \in F$   
 に對しても  $Y$  上局所-様に  $\lim L_i f = \overline{Af}$  であければ、ど  
 んな  $A(F)$ -affine element  $f$  に對しても、 $Y$  上局所  
 -様に  $\lim L_i f = \overline{Af}$  である。

系2.  $A$  は  $F$  から  $C(Y)$  への positive linear mapping  
 とある。 $\delta(A(F))$  の compact 部分集合  $S$  に對して、どの  
 $g \in F$  についても  $S$  上-様に  $\lim L_i g = Ag$  であければ、  
 どの  $f \in E$  に對しても、 $S$  上-様に  $\lim L_i f = \overline{Af}$  であ  
 る。

$A$  は  $F$  から  $C(Y)$  への positive linear mapping とある。

次の性質を持つ  $f \in E$  の全体を  $S(F, A)$  で表わす:

$E$  から  $\mathbb{R}^Y$  への monotone mappings からなる net  $(L_i)$  と  $F$  の任意の元  $g$  に対して,  $(L_i g)$  が  $A g$  に局所一様に収束すれば,  $(L_i f)$  はある  $L f \in \mathbb{R}^Y$  に局所一様に収束する。

$E$  の部分集合  $G$  より generate された linear subspace を  $F(G)$  とすると,  $S(F(G), A) = E$  を満足すれば,  $G$  を  $A$ -Korovkin set と呼ぶ。

定理 3.  $S(F, A)$  は  $A(F)$ -affine elements の全体と等しい。

系.  $E$  が  $G^+$ -bounded であるような  $E$  の部分集合  $G$  が  $A$ -Korovkin set であるための必要十分条件は,  $Y = \delta(A(F(G)))$  が成り立つことである。

#### §4. pointwise 収束

$E$  は ordered vector 空間で,  $C$  は  $E$  から  $C^+$ -bounded であるような  $E$  の convex cone とある。  $Y$  は集合として,  $A$  は  $C$  から  $\mathbb{R}^Y$  への monotone, sublinear mapping とある。  $(L_i)_{i \in I}$  は  $E$  から  $\mathbb{R}^Y$  への monotone mappings からなる net とある。このとき,  $Y$  は discrete



位相を入れることにより、 $Y$  は局所 compact 空間となり、

一点集合は compact set だから、定理 1 より、次の定理が成り立つ。

定理 4.  $(L_i)$  は  $E$  から  $\mathbb{R}^Y$  への monotone, subadditive mappings からなる net で  $L_i(0) = 0$  を満たすものとする。 $S$  は  $Y$  の部分集合とする。どんな  $g \in C$  に対しても  $S$  上で pointwise に  $\overline{\lim} L_i g \leq Ag$  であれば、 $S$  上  $\overline{Af} = -\overline{A(-f)}$  であるような  $f$  に対して、 $(L_i f)$  は  $S$  上で pointwise に  $\overline{Af}$  に収束する。

また、特に  $C$  が linear subspace  $F$  になっているときには、定理 2 の type の pointwise 収束に関する結果も得られることは、明らかである。

§5. Order 収束.  $Y$  は集合として、 $\mathbb{R}^Y$  の linear subspace  $B$  が  $B = B^+ - B^+$  と書けたとある。ここで  $B^+ = B \cap \{f : f \geq 0\}$  である。

$$B^b = \{f \in \mathbb{R}^Y : |f| \leq h, \exists h \in B^+\}$$

とおき、 $B \subset G \subset B^b$  であるような  $\mathbb{R}^Y$  の sub-vector lattice  $G$  上の order 位相  $T_o(G)$  とは、どんな order interval

$$\{g' \in G : -g \leq g' \leq g\} \quad (\forall g \in G^+)$$

は bounded にある最強の locally convex topology のことである。

$E$  は  $B^+$  から  $(0, \infty)$  への関数の全体とあるとき、 $E \ni \varepsilon$  に對して、

$$V_\varepsilon = \{f \in B^+; \exists h_1, \dots, h_n \in B^+, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \\ |f| \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \varepsilon(h_i) h_i\}$$

とおく。このとき、次の命題が成り立つ ([2, 1.1 Lemma]).

命題 2.  $(V_\varepsilon \cap G)_{\varepsilon \in E}$  は定数関数 0 の convex, symmetric 基本  $T_0(G)$ -近傍系である。

$Y$  は局所 compact 空間,  $B$  は  $C(Y)$  の adapted linear space とある。あるいは,  $B$  は  $C(Y)$  の linear subspace で、次の条件 (i), (ii), (iii) を満たすものとする:

(i)  $B = B^+ - B^+$ ,

(ii) どんな  $y \in Y$  に對しても,  $f(y) > 0$  であるような  $f \in B^+$  が存在する,

(iii) どんな  $f \in B^+$  に對しても、次の性質をもつ  $g \in B^+$  がある: 任意の  $\varepsilon > 0$  に對して、 $\{y; f(y) > \varepsilon g(y)\}$  は compact 集合である。

$S$  は  $Y$  の閉部分集合とある。  $B^b(S) = \{f|S; f \in B^b\}$  とおく。 そのとき  $B_0(S) = B^b(S) \cap C(S)$  は 再び  $C(S)$  の adapted 空間であり、  $B_0(S)$  は  $\mathbb{R}^S$  の sub-vector lattice である。 かくて、  $B_0(S)$  の order 位相は  $B^b(S)$  上の order 位相により induce されたものである。  $B_0(S)$  における net  $(f_\alpha)$  がこの order 位相で  $f$  に収束するとき、  $(f_\alpha)$  は  $f$  に  $S$  上 order 収束あるという。

17. Bauer による次の定理 ([2, 2.1. lemma]) は Dini の定理の局所 compact 空間への拡張である。

定理 5.  $(g_i)_{i \in I}$  は  $B_0(Y)$  の decreasing net で、 任意  $y \in S$  に対して  $\inf_i g_i(y) = 0$  とある。 そのとき、  $(g_i)_{i \in I}$  は  $S$  上 0 に order 収束ある。

$E$  は ordered vector 空間、  $F$  は  $E$  の linear subspace で、  $E$  は  $F^+$ -bounded とある。 このとき、 定理 5 を使って、 次の定理が得られる。

定理 6.  $Y$  は局所 compact 空間とある。  $A$  は  $E$  から  $C(Y)$  への positive linear mapping で、  $A$  の  $A$  に関する像  $A(F)$  は  $C(Y)$  の adapted space とある。  $(L_i)_{i \in I}$  は  $E$  から  $\mathbb{R}^Y$  への monotone mappings からなる net で、  $S$  は  $Y$  の閉部分集合とある。 このとき、 任意  $g \in F$  に対して

$(L; g)$  は  $Ag$  に  $S$  上で order 収束すれば,  $S$  上で  $Af = \overline{Af}$  を満足するどんな  $f \in E$  に対しても,  $(L; f)$  は  $Af$  に  $S$  上で order 収束する。

この定理が成り立つから, 定理と同じ仮定のもとで, 定理 2 の系 1, 2 で収束を order 収束に,  $S$  を閉集合とした形の系も得られることは明らかである。

#### §6. 応用.

[3] で考えられた finite defined operators に関する Korovkin type の定理は, ほとんどゆるい条件のもとで, 定理 2 の系を使うことにより簡単に証明される。そのため,  $X$  と  $Y$  は compact Hausdorff 空間で,  $X$  は少なくとも  $n+1$  個の要素を持つとある。  $E = C(X)$  として,  $E$  から  $C(Y)$  への positive linear mapping  $A$  を

$$Af(y) = \sum_{i=1}^n \psi_i(y) f(\varphi_i(y)), \quad f \in C(X), \quad y \in Y,$$

と定義する。ここで,  $\psi_i \in C^+(Y)$ ,  $\varphi_i$  は  $Y$  から  $X$  への連続写像とある。  $C(X)$  の linear subspace  $F$  は次の性質を持つものとする:

どんな異なる  $n$  個の  $X$  の点  $x_1, \dots, x_n$  について  $x_i$  上では 0 ( $1 \leq i \leq n$ ), その他の点  $x$  では  $g(x) > 0$  と

なるような  $g \in F$  が存在する。

このとき、 $\delta(A(F)) = Y$  でありことが簡単に証明されるから、定理2の系2により次の定理が成り立つ。

定理7.  $(L_i)$  は  $C(X)$  から  $(Y)$  への monotone mappings からなる net とある。どんな  $g \in F$  に対して  $(L_i g)$  が  $Ag$  に一様に収束すれば、どんな  $f \in C(X)$  に対して  $(L_i f)$  は  $Af$  に一様に収束する。

### 参考文献

- [1] H. Bauer, Theorems of Korovkin type for adapted spaces. Ann. Inst. Fourier 23, 245-260 (1973).
- [2] H. Bauer, Convergence of monotone operators, Math. Z. 136, 315-330 (1974).
- [3] A. S. Cavaretta, Jr., A Korovkin theorem for finite defined operators, Proc. Intern. Symp. on Approximation Theory (Univ. of Texas, Austin, Jan. 22-24), 299-305 (1973).